Jakub Juránek, UČO 393110

2.2.B10
Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Potom:
a) dokažte, že průnik libovolného neprázdného systému podgrup grupy $(G, \cdot)$ je opět podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

Označme:

pro konečný systém:	podgrupy $H_1, H_2, \ldots, H_n$	a indexovou množinu	$I = \{1, 2, \ldots, n\}$
pro nekonečný systém:	podgrupy $H_1, H_2, \ldots$	a indexovou množinu	$I = \mathbb{N}$

$$\forall i \in I : H_i \subseteq G \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \subseteq G$$

Označme e jedničku grupy G. Pak e je jedničkou každé její podgrupy.

$$\forall i \in I : e \in H_i \Rightarrow e \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$$

Nechť $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$ lib. $\Rightarrow \forall i \in I : a, b \in H_i$

$$a, b \in H_i \Rightarrow (a \cdot b^{-1}) \in H_i, \text{ protože } H_i \text{ je grupa, pro } \forall i \in I$$

$$\forall i \in I : (a \cdot b^{-1}) \in H_i \Rightarrow (a \cdot b^{-1}) \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Máme tedy: pro $a, b \in \bigcap_{i \in I} H_i$ libovolné, je $(a \cdot b^{-1}) \in \bigcap_{i \in I} H_i \ \wedge\ \emptyset \neq \bigcap_{i \in I} H_i \subseteq G$
$\Rightarrow (\bigcap_{i \in I} H_i, \cdot)$ je podgrupou grupy $(G, \cdot)$

b) ukažte, že sjednocení dvou podgrup grupy $(G, \cdot)$ obecně není podgrupou grupy $(G, \cdot)$.

Zvolme si grupu $(\mathbb{C}, +)$ a její podgrupy $(\mathbb{Z}, +)$ a $(i \cdot \mathbb{Z}, +)$, kde $i \cdot \mathbb{Z} = \{i \cdot z \mid z \in \mathbb{Z} \text{ libovolné}\}$
Např.: $1 \in \mathbb{Z}$ a $i \in i \cdot \mathbb{Z}$

$$\big[(1 + i) \notin \mathbb{Z} \wedge (1 + i) \notin i \cdot \mathbb{Z}\big] \Rightarrow (1 + i) \notin (\mathbb{Z} \cup i \cdot \mathbb{Z})$$

$\mathbb{Z} \cup i \cdot \mathbb{Z}$ tedy není uzavřené na operaci $+$, není tedy ani grupoidem, natož podgrupou grupy $(\mathbb{C}, +)$.